



Z ruchem okresowym,
a w szczególności z ruchem
wahadłowym, spotykamy się często,
a być może nawet codziennie. Czy
jednak jest on dla nas dostatecznie
zrozumiały? Opracowanie stanowi
punkt wyjścia do szczegółowej analizy
rzeczywistego ruchu wahadła.

Wprowadzenie do teorii wahadła

MGR INŻ. WINCENTY JANOWSKI

JANOWSCY
projektowanie w budownictwie

Spis treści

1. Wstęp	2
2. Wahadło matematyczne	3
3. Wahadło fizyczne	9
4. Błąd kołowy	11
5. Opory ruchu	11
5.1 Ruch w powietrzu	14
5.2 Zawieszka sprężysta	18
5.3 Tarcie suche	19
6. Oddziaływania	21
6.1 Zmiany temperatury	21
6.2 Zmiany długości wywołane siłą odśrodkową	26
7. Geometria	27
7.1 Moment statyczny	27
7.2 Moment bezwładności	28

1. Wstęp

Z ruchem okresowym, a w szczególności z ruchem wahadłowym, spotykamy się często, a być może codziennie, choć nie zawsze to zauważamy. Lampa, żyrandol, pion murarski, to wszystko wahadła, choć każde o innej konstrukcji, a co za tym idzie o innym charakterze ruchu. Wiemy zatem intuicyjnie co można nazwać wahadłem, jednak z jego dokładniejszym zdefiniowaniem mogą już być problemy. Według Słownika Języka Polskiego (PWN 1989) wahadło to ciało zawieszone na osi i poruszające się ruchem okresowym wokół położenia równowagi, pod wpływem siły ciężkości. Taka definicja bardzo zawęża zakres jej stosowania i w zasadzie nie znajduje odpowiednika w przyrodzie, a nawet w laboratorium, ponieważ już zwykle ziemskie wahadło, ciężarek na sznurku, porusza się pod wpływem sił grawitacji i, jak się dowiemy dalej, innych sił, co czyni ten ruch i jego opis bardzo skomplikowanym. Owszem, może to być pierwsze przybliżenie wahadła, którego szkolnym odpowiednikiem jest wahadło matematyczne.

Wahadło matematyczne to mechanizm składający się z trzech elementów: z punktu o masie m (ciało), nierozciągliwej i nieważkiej nici o długości l oraz nieruchomego punktu zaczepienia realizującego przegub (oś obrotu), w którym nie występuje tarcie, a co najważniejsze, na cały układ działa tylko niezmienna siła ciężkości. Zastanówmy się teraz, czy fizyczna realizacja wahadła matematycznego jest możliwa? Punkt materialny o masie m nie istnieje z tej prostej przyczyny, że wszystkie ciała materialne mają określoną gęstość, zatem każda masa ma objętość różną od zera

$$V = \frac{m}{\rho} > 0; \quad (1.1)$$

gdzie: m – masa [kg],

ρ – gęstość [kg/m³].

Mamy więc pierwsze ograniczenie, które nie pozwala na realizację punktu materialnego o skończonej masie. Ograniczenie to obchodzi się pewnym założeniem upraszczającym, w którym cała masa wahadła jest skupiona w jednym punkcie.

Jeszcze ciekawiej jest z nieważką i nierozciągliwą nicią. Tutaj założeń upraszczających jest kilka:

- zamiast pręta pryzmatycznego (takiego o jednakowym przekroju na całej długości) mamy jednowymiarowy odcinek,
- nie uwzględniamy wydłużenia pod wpływem sił ciężkości i sił bezwładności,
- nie uwzględniamy skończonej masy nici.

W odniesieniu do punktu zaczepienia problem polega na niemożności realizacji przegubu, w którym nie występowałyby żadne siły. Niezależnie od sposobu wykonania będziemy mieli opory tarcia (łożysko) lub opory lepko-sprężyste przy zawieszeniu

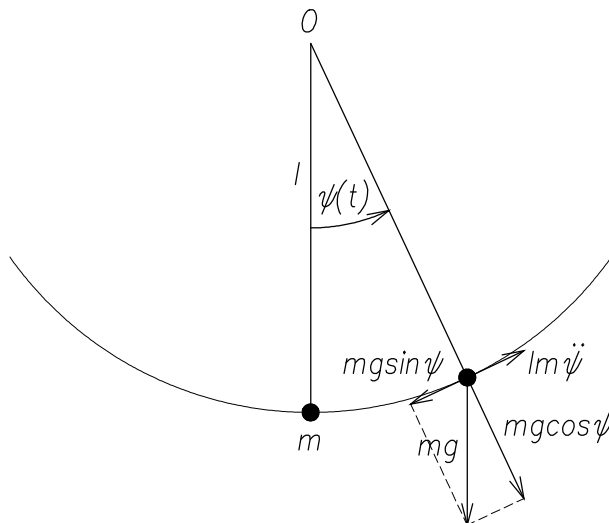
bezpośrednim. Aby problem jeszcze bardziej rozbudować należy zauważyć, że punkt ugięcia nici może zmieniać swoje położenie.

Dochodzimy na koniec do założenia, że wahadło porusza się wyłącznie pod wpływem niezmiennych sił ciężkości. Pomijając siły wewnętrzne, oprócz sił ciężkości, które nie są niezmiennie w czasie (wpływ ciał niebieskich, ruchów atmosfery i ruchów mas wokół) występują dodatkowo: pole sił magnetycznych i elektrostatycznych, pole sił aerostaticznych i aerodynamicznych oraz pole sił Coriolisa. Należy jeszcze uwzględnić efekty termiczne i całe spektrum fal elektromagnetycznych i akustycznych. Widzimy więc, że problem jest niezwykle złożony i coś takiego jak wahadło matematyczne nie może istnieć w realnym świecie.

Wahadło matematyczne ma jednak jedną zaletę – jego ruch jest podstawą analizy drgań, w związku z tym ma znaczenie wręcz fundamentalne i dlatego sformułowanie i rozwiązanie równania jego ruchu jest tak ważne.

2. Wahadło matematyczne

Przyjrzyjmy się rysunkowi poniżej. Jest to schemat obliczeniowy wahadła matematycznego. Na nierozciągliwej i nieważkiej nici o długości l , zawieszony w punkcie O , porusza się punkt materialny o masie m w polu sił ciężkości o przyspieszeniu g .



Rys. 2.1. Schemat wahadła matematycznego

W położeniu równowagi statycznej (pion) na punkt materialny o masie m działa siła ciężkości F

$$F = mg \text{ [N]}, \quad (2.1)$$

i taką samą siłą rozciągana jest nić zawieszona. Nie trzeba dodawać, że taka jest również reakcja więzu w punkcie O . Po odchyleniu masy m o pewien kąt ψ i uwolnieniu jej,

równowaga sił w układzie współrzędnych prostokątnych związanym z punktem O będzie wyglądała następująco:

W kierunku promienia siła F_r

$$F_r = mg \cos \psi \text{ [N]}, \quad (2.2)$$

równoważona przez naciąg nici, zaś w kierunku stycznej do okręgu, po którym może się poruszać masa m , siła F_s , w pierwszej fazie ruchu, do najniższego punktu, zgodna z kierunkiem ruchu, w drugiej fazie, od najniższego do najwyższego po przeciwnej stronie, skierowana przeciwnie do kierunku ruchu, jednak zawsze sprowadzająca układ do położenia równowagi:

$$F_s = mg \sin \psi \text{ [N]}, \quad (2.3)$$

równoważona przez siłę bezwładności F_b równą iloczynowi przyśpieszenia stycznego i masy m .

$$F_b = a_s m = lm\varepsilon \text{ [N]}, \quad (2.4)$$

Przyśpieszenie ε jest przyśpieszeniem kątowym,

$$\varepsilon = \frac{d^2\psi}{dt^2} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right], \quad (2.5)$$

Zatem równanie ruchu, uwzględniające równowagę momentów względem punktu O , będzie następujące:

$$l^2 m \frac{d^2\psi}{dt^2} + mgl \sin \psi = 0, \quad (2.6)$$

skąd po uproszczeniu, wiedząc, że masa bezwładna jest równa masie grawitacyjnej, otrzymujemy:

$$l \frac{d^2\psi}{dt^2} + g \sin \psi = 0, \quad (2.7)$$

Wynika stąd, że ruch wahadła matematycznego nie jest zależny od masy punktu materialnego. Przyjmując teraz, że dla małych wychyleń

$$\sin \psi = \psi, \quad (2.8)$$

oraz wprowadzając wielkość zwaną częstością kołową – ω , definiowaną jak niżej

$$\omega^2 = \frac{g}{l}, \quad (2.9)$$

nasze równanie przyjmie prostą postać:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega^2\psi = 0, \quad (2.10)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Najdogodniejszą postacią jego rozwiązania jest funkcja:

$$\psi(t) = C \sin(\omega t + \psi_0), \quad (2.11)$$

Aby ruch opisany powyższym równaniem był ruchem okresowym o okresie T , musi zachodzić

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2.12)$$

Istotnie,

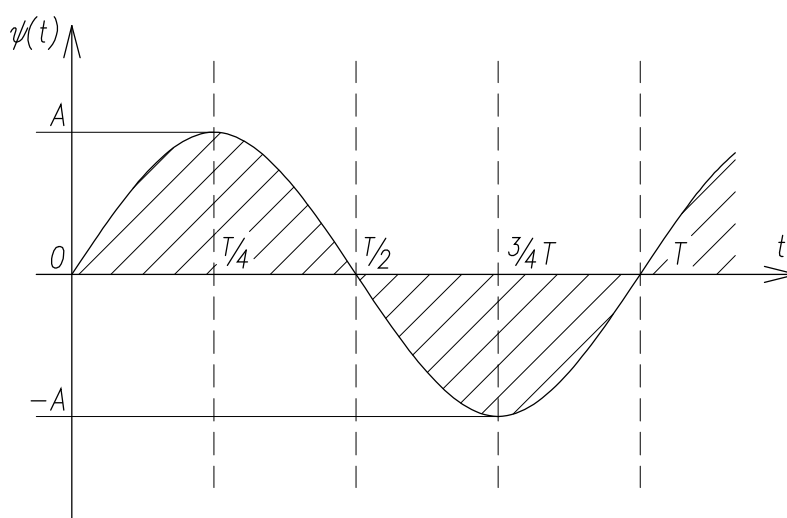
$$\psi(t+T) = C \sin(\omega t + \psi_0 + \omega T) = C \sin(\omega t + \psi_0 + 2\pi) = \psi(t), \quad (2.13)$$

Stałe C i ψ_0 można wyznaczyć z charakteru ruchu wahadła. Rozpoczynając opis ruchu od najniższego położenia punktu materialnego, zachodzi:

$$\psi(0) = 0, \quad \psi\left(\frac{T}{4}\right) = A, \quad (2.14)$$

gdzie A jest amplitudą drgań, czyli największym, kątowym, wychyleniem wahadła. Stąd otrzymujemy ostateczną postać równania ruchu:

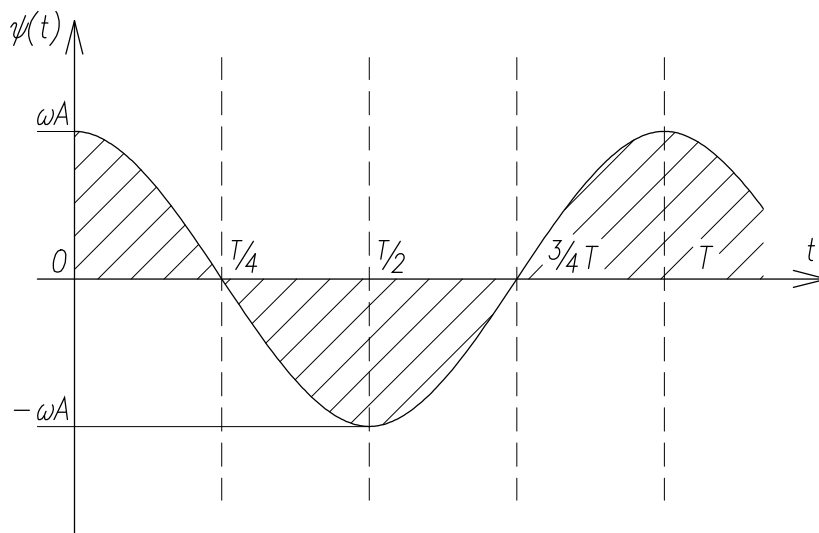
$$\psi(t) = A \sin \omega t. \quad (2.15)$$



Rys. 2.2. Wykres $\psi(t)$

Mamy więc równanie ruchu, które jest sinusoidą o maksimum równym A dla $t = \frac{T}{4} + nT$ i minimum równym $-A$ dla $t = \frac{3}{4}T + nT$. Maksymalne bezwzględne wartości amplitudy występują dla $t = \frac{T}{4} + \frac{n}{2}T$ i wynoszą A . Różniczkując równanie ruchu po czasie, otrzymujemy równanie prędkości kątowej:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = A\omega \cos \omega t. \quad (2.16)$$



Rys. 2.3. Wykres $\frac{d}{dt}\psi(t)$

Z porównania wykresów ruchu i prędkości kątowej widać, że prędkość kątowa jest równa 0 dla maksimum i minimum amplitudy. Maksymalne bezwzględne wartości prędkości kątowej osiągnęte są dla $t = \frac{n}{2}T$ i wynoszą :

$$\frac{d}{dt}\psi(t)_{\max} = A\omega = A\sqrt{\frac{g}{l}} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right], \quad (2.17)$$

Prędkość liniowa, której wektor jest styczny do łuku opisywanego przez punkt materialny, a którą oznaczymy jako $V(t)$, dana jest równaniem:

$$V(t) = Al\sqrt{\frac{g}{l}} \cos \omega t = A\sqrt{gl} \cos \omega t \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad (2.18)$$

a jej wielkość maksymalna odpowiednio:

$$V(t)_{\max} = A\sqrt{gl} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad (2.19)$$

Po wychyleniu wahadła o kąt A , punkt materialny wzniesie się na wysokość h . Korzystając z zależności geometrycznych otrzymujemy:

$$h = l - l \cos A = l(1 - \cos A), \quad (2.20)$$

$$\frac{h}{l} = 1 - \cos A, \quad (2.21)$$

$$\cos A = 1 - \frac{h}{l}, \quad (2.22)$$

po obustronnym podniesieniu do kwadratu

$$\cos^2 A = 1 - \frac{2h}{l} + \frac{h^2}{l^2}, \quad (2.23)$$

Ostatni składnik sumy tj. $\frac{h^2}{l^2}$ można pominąć jako wielkość małą wyższego rzędu. Ostatecznie otrzymujemy więc:

$$\cos^2 A = 1 - \frac{2h}{l}, \quad (2.24)$$

a stąd, po podstawieniu $1 = \sin^2 A + \cos^2 A$,

$$\sin^2 A = \frac{2h}{l}, \quad (2.25)$$

Wracając teraz do założenia małych wychyleń mamy:

$$\sin A = A, \quad (2.26)$$

a stąd,

$$A^2 = \frac{2h}{l} \text{ i } A = \sqrt{\frac{2h}{l}}, \quad (2.27)$$

Po podstawieniu ostatniego wyrażenia do wzoru na prędkość maksymalną otrzymujemy:

$$V(t)_{\max} = A\sqrt{gl} = \sqrt{\frac{2h}{l}}\sqrt{gl} = \sqrt{2gh} \left[\frac{m}{s} \right], \quad (2.28)$$

W czasie ruchu wahadła następuje ciągła zamiana energii potencjalnej na kinetyczną i odwrotnie. W górnym położeniu punktu materialnego, dla największego co do wartości bezwzględnej kąta wychylenia (amplitudy) A , dla $t = \frac{T}{4} + \frac{n}{2}T$, punkt materialny ma maksymalną energię potencjalną i energię kinetyczną równą 0 wobec $V = 0$. Przyjmując poziom odniesienia w najniższym położeniu punktu materialnego otrzymujemy:

$$E_p = mgh \text{ [J]}, \quad (2.29)$$

W dolnym położeniu punktu materialnego, dla kąta wychylenia $\psi = 0$, dla $t = \frac{n}{2}T$, wobec $h = 0$, energia potencjalna jest równa 0, natomiast energia kinetyczna przyjmuje wartość maksymalną, gdyż prędkość liniowa punktu materialnego jest największa:

$$E_k = \frac{1}{2}mV^2 \text{ [J]}, \quad (2.30)$$

Z prawa zachowania energii wynika równość energii kinetycznej i potencjalnej. Można zatem napisać, że:

$$E_p = E_k, \quad (2.31)$$

stąd,

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2, \quad (2.32)$$

Po obustronnym podzieleniu przez m otrzymujemy:

$$gh = \frac{1}{2}V^2, \quad (2.33)$$

$$V_{\max} = \sqrt{2gh} \left[\frac{m}{s} \right], \quad (2.34)$$

Wykazaliśmy zatem, że wyrażenie na prędkość maksymalną otrzymane z zależności kinematycznych jest identyczne, co oczywiście zrozumiałe, z tym otrzymanym z zależności energetycznych. Warto jeszcze zastanowić się nad tym, jak zachodzi wymiana energii w czasie. Korzystając z (2.18), (2.27) i (2.30) otrzymujemy:

$$E_k = \frac{1}{2}m \left(A\sqrt{gl} \cos \omega t \right)^2 = \frac{1}{2}A^2 mgl (\cos \omega t)^2 = mgh (\cos \omega t)^2 = E_{p,\max} (\cos \omega t)^2. \quad (2.35)$$

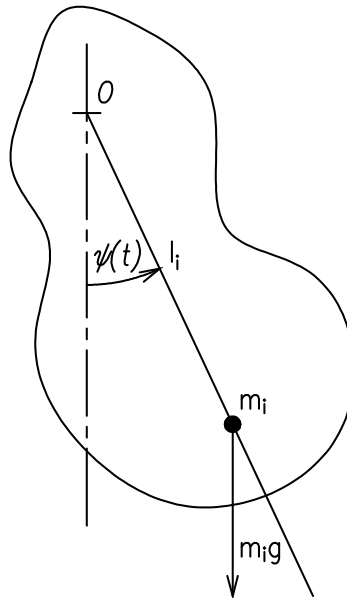
Na zakończenie należy powiedzieć o najważniejszej właściwości wahadła matematycznego – o izochronizmie. Z (2.12) otrzymujemy:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ [s]}, \quad (2.36)$$

z czego wynika, że okres wahań nie zależy od amplitudy, a wyłącznie od długości wahadła i wartości przyspieszenia siły grawitacji.

3. Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne jest dokładniejszym niż wahadło matematyczne przybliżeniem ruchu rzeczywistego wahadła. Różnica polega na tym, że w opisie wahadła fizycznego przyjmuje się skończone wymiary jego elementów oraz rzeczywisty rozkład mas. Na rysunku poniżej pokazano schemat takiego wahadła.



Rys.3.1. Schemat wahadła fizycznego

W najbardziej ogólnym przypadku wahadłem fizycznym jest bryła sztywna, która może wykonywać ruch względem jednej osi obrotu, w polu sił ciężkości. Pozostałe założenia przyjmuje się jak dla wahadła matematycznego. W związku z tym, że w przypadku bryły sztywnej występuje nieskończony zbiór punktów materialnych, sposób rozwiązania zadania jest nieco odmienny. Podobnie jak dla wahadła matematycznego zapiszmy warunek równowagi momentu bryły względem osi obrotu. Dla pojedynczego punktu o numerze bieżącym i będzie on następujący:

$$l_i l_i m_i \frac{d^2 \psi}{dt^2} + l_i m_i g \sin \psi = 0, \quad (3.1)$$

Sumując po całej bryle otrzymujemy:

$$\sum_1^n l_i^2 m_i \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \sum_1^n l_i m_i g \sin \psi = 0, \quad (3.2)$$

W powyższym równaniu pierwsza suma jest momentem bezwładności bryły względem osi obrotu, natomiast druga suma momentem sił ciężkości również względem osi obrotu. Nasze równanie możemy zatem zapisać nieco inaczej:

$$J \frac{d^2 \psi}{dt^2} + M \sin \psi = 0. \quad (3.3)$$

Przyjmując założenie małych wychyleń (2.8) oraz zapisując moment jako iloczyn całkowitego ciężaru bryły Q i jego odległości od środka ciężkości do osi obrotu d mamy:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{Qd}{J}\psi = 0. \quad (3.4)$$

Stosując teraz analogiczne jak w przypadku wahadła matematycznego podstawienie:

$$\omega^2 = \frac{Qd}{J} \quad (3.5)$$

otrzymujemy postać równania ruchu identyczną jak dla wahadła matematycznego. W celu ułatwienia dalszej analizy wprowadza się jeszcze jedną wielkość pomocniczą – długość zredukowaną wahadła, definiowaną jako iloraz momentu bezwładności J i momentu statycznego S bryły względem osi obrotu:

$$l_0 = \frac{J}{S} [m]. \quad (3.6)$$

Wiedząc, że:

$$S = \sum_1^n l_i m_i = md [kgm], \quad (3.7)$$

otrzymujemy

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_0}} \left[\frac{1}{s} \right], \quad (3.8)$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}. \quad (3.9)$$

Z powyższych rozważań wynika, że ruch wahadła fizycznego można sprowadzić do opisu ruchu wahadła matematycznego, w którym długość nici l zastępuje się długością zredukowaną l_0 . Należy podkreślić, że długość zredukowana nie jest odległością do środka ciężkości bryły. W odniesieniu do prędkości kątowej i prędkości liniowej każdego z punktów bryły wahadła fizycznego mają oczywiście zastosowanie wzory (2.16) do (2.19).

Na zakończenie, podobnie jak dla wahadła matematycznego, określimy jak przedstawia się energia kinetyczna i potencjalna bryły wahadła fizycznego. Dla energii kinetycznej:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i V_i^2 [J]. \quad (3.10)$$

Korzystając z (2.19) i (3.7) mamy:

$$E_k = \frac{1}{2} g A^2 \sum_1^n l_i m_i = \frac{1}{2} g A^2 S = \frac{1}{2} M A^2 \quad [J], \quad (3.11)$$

W celu obliczenia energii potencjalnej wykorzystamy właściwości środka masy oraz (2.27):

$$h = \frac{1}{2} A^2 d \quad [m], \quad (3.12)$$

$$E_p = mgh = \frac{1}{2} A^2 dm g = \frac{1}{2} M A^2 \quad [J]. \quad (3.13)$$

Podobnie jak w przypadku wahadła matematycznego, w wahadle fizycznym zachodzi ciągła przemiana energii potencjalnej w kinetyczną i odwrotnie.

Podsumowując, należy podkreślić, że założenie małych przemieszczeń w ruchu wahadła, jest w istocie przyjęciem innego niż ziemskie pole grawitacji pola sił, które w czasie ruchu wahadła wykonuje większą pracę. Istotnie:

$$\int_0^A M \psi d\psi > \int_0^A M \sin \psi d\psi. \quad (3.14)$$

Stąd bierze się różnica w ruchu wahadła rzeczywistego, które spóźnia się w stosunku do wahadła obliczanego przy założeniu małych przemieszczeń.

4. Błąd kołowy

Analiza ruchu wahadła matematycznego i fizycznego przeprowadzona w punktach 2 i 3 opierała się na założeniu małych przemieszczeń. Należy zatem zadać pytanie co jest małym przemieszczeniem. Zależy to oczywiście od dokładności, jakie chcemy osiągnąć w ruchu wahadła. Dla dokładnych wahań amplituda nie przekracza 30'. Przy tak dobranej amplitudzie błąd dobowy jest mniejszy niż 0,5s. W miarę jak amplituda będzie rosła, błąd dobowy może osiągnąć poziom wielu minut, a nawet godzin.

Aby ruch wahadła opisać dokładniej niż to było uczynione wyżej, musimy odejść od założenia małych przemieszczeń. Możemy teraz szukać wprost rozwiązania równania ruchu (3.3) lub uprościć nieco zagadnienie wychodząc z prawa zachowania energii.

Wiedząc, że:

$$E_k = E_p - mg\Delta h = mg(d \cos \psi - d \cos A), \quad (4.1)$$

energia kinetyczna wahadła w dowolnym momencie jego ruchu jest następująca:

$$E_k = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 = M (\cos \psi - \cos A) [J]. \quad (4.2)$$

Stąd:

$$\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{2M}{J} (\cos \psi - \cos A), \quad (4.3)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{2M}{J}} \sqrt{(\cos \psi - \cos A)}, \quad (4.4)$$

a po rozdzieleniu zmiennych

$$dt = \sqrt{\frac{J}{2M}} \frac{d\psi}{\sqrt{(\cos \psi - \cos A)}}, \quad (4.5)$$

lub inaczej, korzystając z (3.6)

$$dt = \sqrt{\frac{l_0}{2g}} \frac{d\psi}{\sqrt{(\cos \psi - \cos A)}}, \quad (4.6)$$

W dalszym ciągu rozważań możemy pójść dwiema drogami. Rozwinąć funkcję z prawej w szereg funkcyjny i ten dopiero całkować, co jest znane z literatury, lub zastosować dowolną metodę całkowania numerycznego. Całkując prawą stronę równania w granicach od 0 do A, po lewej otrzymamy czas trwania 1/4 okresu.

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l_0}{2g}} \int_0^A \frac{d\psi}{\sqrt{(\cos \psi - \cos A)}}. \quad (4.7)$$

Oznaczmy sobie jako η nową funkcję, którą zdefiniujemy następująco:

$$\eta = \frac{T}{T_0}, \quad (4.8)$$

gdzie T jest okresem wahadła liczonym z uwzględnieniem dużych przemieszczeń, natomiast T_0 okresem podstawowym obliczonym wg (3.9), przy założeniu małych przemieszczeń. Wstawiając odpowiednio (4.7) i (3.9) do (4.8) otrzymujemy:

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^A \frac{d\psi}{\sqrt{(\cos \psi - \cos A)}}. \quad (4.9)$$

Funkcja η obrazuje różnicę pomiędzy długością okresu rzeczywistego i okresu podstawowego. W tabeli i na wykresie poniżej przedstawiono zależność $\eta = \eta(A)$.

A [deg]	η [-]
0,25	1,0000011953
0,50	1,0000047604
1,00	1,0000190388
2,00	1,0000761594
3,00	1,0001713742
4,00	1,0003047025
5,00	1,0004761725
6,00	1,0006858201
7,00	1,0009336894
8,00	1,0012198324
9,00	1,0015443092
10,00	1,0019071881

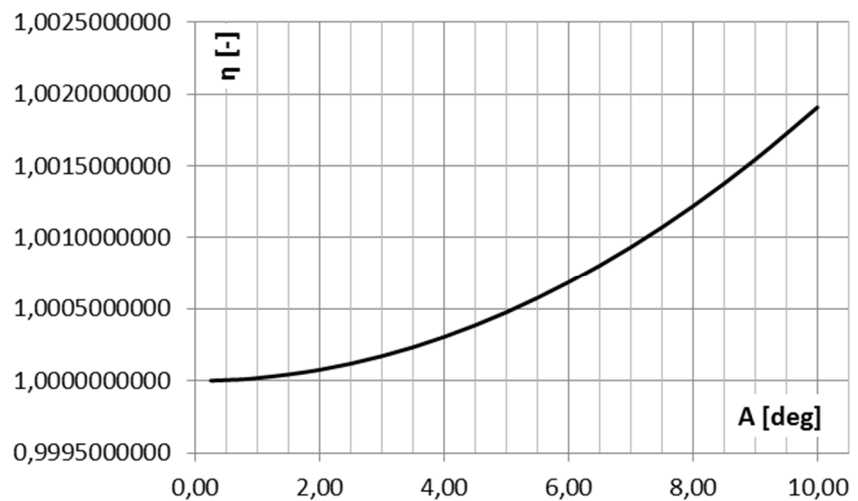


Tabela 4.1. $\eta = \eta(A)$

Wykres 4.1. $\eta = \eta(A)$

Podobnie jak dla pełnego okresu możemy postąpić dla dowolnej chwili ruchu wahadła. W takim przypadku, rozpoczynając ruch od górnego położenia:

$$t = \sqrt{\frac{l_0}{2g}} \int_{A-\Theta}^A \frac{d\psi}{\sqrt{(\cos \psi - \cos A)}} [s], \quad (4.10)$$

gdzie Θ jest dowolnym kątem mniejszym od amplitudy ($\Theta < A$), natomiast dla małych przemieszczeń, po przekształceniu (2.15):

$$t_0 = \sqrt{\frac{l_0}{g}} \arccos\left(\frac{A-\Theta}{A}\right) [s]. \quad (4.11)$$

Możemy zatem z bardzo dobrym przybliżeniem, szczególnie dla niewielkich amplitud, zapisać:

$$\psi(t) = A \sin\left(\frac{\omega}{\eta} t\right). \quad (4.12)$$

Należy zwrócić uwagę na to, że funkcja η nie zależy ani od długości wahadła, ani od przyspieszenia siły grawitacji, co powoduje, że błąd kołowy B_k definiowany jako różnica pomiędzy czasem trwania tej samej ilości wahań wahadła obliczanego z uwzględnieniem dużych i małych amplitud,

$$B_k = n(T - T_0) [s], \quad (4.13)$$

zależy tylko od czasu. Zwykle błąd kołowy podaje się dla jednej doby astronomicznej równej 86400 sekund. Przyjmując, że:

$$nT_0 = 86400s. \quad (4.14)$$

otrzymujemy:

$$B_{kd} = 86400(\eta - 1) [s]. \quad (4.15)$$

Poniżej podano przykładowe dobowe błędy kołowe dla różnych amplitud.

A [deg]	0,25	0,50	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
B_{kd} [s]	0,103	0,411	1,645	6,582	14,807	26,326	41,141	59,259	80,671	105,394	133,428	164,781

Tabela 4.2. $B_{kd} = B_{kd}(A)$

5. Opory ruchu

Wahadło pracujące w warunkach ziemskich narażone jest na tłumienie drgań powodowane w szczególności przez:

- siły tarcia związane z ruchem w powietrzu,
- siły tarcia związane z łożyskowaniem,
- ciśnienie światła,
- siły elektromagnetyczne wywołane ruchem w polu magnetycznym ziemi,
- siły elektrostatyczne,
- wiry Karmana,
- inne o marginalnym znaczeniu lub jeszcze nieznanne.

Poniżej omówiono niektóre z wyżej wymienionych oporów ruchu.

5.1 Ruch w powietrzu

Parametrem opisującym charakter opływu ciała poruszającego się w powietrzu jest bezwymiarowa liczba Reynoldsa definiowana jako:

$$R_e = \frac{\rho V d}{\mu}, \quad (5.1.1)$$

gdzie: ρ – gęstość powietrza [kg/m^3],

V – prędkość ruchu [m/s],

d – rozmiar ciała w kierunku ruchu [m],

μ – lepkość dynamiczna powietrza [Pas].

Z przyczyn czysto technicznych wahadła wykonywane są najczęściej jako pręty walcowe zakończone soczewką w formie walca o większej średnicy. Zdecydowanie ułatwia to analizę oporu aerodynamicznego, gdyż opływ walca był najczęściej poddawany badaniom. Wynika z nich, że opór aerodynamiczny walca można opisać następującą zależnością:

$$P = \frac{1}{2} \rho V^2 F C_x \quad [N], \quad (5.1.2)$$

w której: F – pole rzutu walca na płaszczyznę prostopadłą do wektora opływu $[m^2]$,
 C_x – bezwymiarowy współczynnik zależny od $C_x = f(R_e)$,
 pozostałe oznaczenia jak dla (5.1.1).

Dokładne wahadło sekundowe porusza się w zakresie liczby $R_e = 0 \div 100$. Po wykonaniu działań jak w (5.1.2) otrzymujemy wprost zależność oporu od prędkości opływu. Okazuje się, że dla bardzo małych liczb Reynoldsa ($R_e < 1$) opór jest zależny liniowo od prędkości, natomiast dalej wykładnik potęgi dla V szybko rośnie i w zakresie R_e dla większości wahadeł utrzymuje się na poziomie około 2,0. W związku z tym, stosowanie w równaniu ruchu liniowej zależności oporu, przynajmniej dla wahadeł, jest błędem, ponieważ liczby Reynoldsa mniejsze od jedności występują tylko na niewielkich odcinkach ruchu.

Rozpatrując zatem ruch wahadła dla niewielkich przemieszczeń, równanie jego ruchu możemy zapisać następująco:

$$J \frac{d^2\psi}{dt^2} + K \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + M\psi = 0, \quad (5.1.3)$$

pamiętając o tym, że K jest funkcją gęstości i lepkości dynamicznej powietrza oraz kształtu i rozmiarów wahadła.

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\frac{h}{2} = \frac{K}{J}, \quad (5.1.4)$$

$$\omega^2 = \frac{M}{J}, \quad (5.1.5)$$

zapisujemy:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{h}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \omega^2\psi = 0. \quad (5.1.6)$$

Podstawiając:

$$z = \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2, \quad (5.1.7)$$

otrzymujemy:

$$\frac{dz}{d\psi} = 2 \frac{d\psi}{dt} \frac{d}{d\psi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = 2 \frac{d^2\psi}{dt^2}, \quad (5.1.8)$$

a stąd równanie (5.1.6) przyjmuje postać:

$$\frac{dz}{d\psi} + hz + 2\omega^2\psi = 0. \quad (5.1.9)$$

Rozwiązaniem tego równania jest:

$$z = Ce^{h\psi} + 2 \frac{\omega^2}{h^2} (h\psi + 1). \quad (5.1.10)$$

Po uwzględnieniu warunku początkowego $z(A) = 0$ otrzymujemy równanie na C:

$$Ce^{hA} + 2 \frac{\omega^2}{h^2} (hA + 1) = 0, \quad (5.1.11)$$

skąd:

$$C = -2e^{-hA} \frac{\omega^2}{h^2} (hA + 1). \quad (5.1.12)$$

Po podstawieniu (5.1.12) do (5.1.10) mamy ostatecznie:

$$\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{2\omega^2}{h^2} \left[(h\psi + 1) - e^{h(\psi-A)} (hA + 1) \right]. \quad (5.1.13)$$

Rozwiązując powyższe względem $\frac{d\psi}{dt}$ i rozdzielając zmienne otrzymujemy:

$$dt = \frac{hd\psi}{\omega \sqrt{2(h\psi + 1) - 2e^{h(\psi-A)} (hA + 1)}}, \quad (5.1.14)$$

W celu znalezienia kolejnych okresów równanie (5.1.14) całkujemy w zakresie kolejnych amplitud, które możemy obliczyć z warunku zerowania się prędkości:

$$\frac{d\psi}{dt} = 0, \quad (5.1.15)$$

a więc:

$$(h\psi_1 + 1) - e^{h(\psi_1 - A)} (hA + 1) = 0. \quad (5.1.16)$$

W następnym przedziale zamiast A wstawiamy ψ_1 po czym obliczamy ψ_2 itd.

Powietrze, oprócz tłumienia drgań, wywołuje jeszcze jedno zjawisko, wpływające bezpośrednio na ruch wahadła, a w szczególności na jego okres. Jest to wypór aerostacyjny objawiający się pozornym zmniejszeniem siły ciężkości oraz rzeczywistą zmianą długości zredukowanej. Zmiana długości zredukowanej jest wywołana wleczeniem pewnej warstwy powietrza wraz z wahadłem. Powoduje ono równocześnie nieco większy niż wynikałoby to z rzeczywistych wymiarów wahadła jego wypór. Z badań wiadomo, że wleczona objętość powietrza jest równa około $2/3$ objętości wahadła.

Założmy dla uproszczenia, że posługujemy się wahadłem matematycznym o objętości soczewki V wykonanej z materiału o gęstości ρ , zawieszony w powietrzu o gęstości ρ_1 , wówczas:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho V l^2}{(\rho V - 1,7 \rho_1 V) gl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho - 1,7 \rho_1}} [s]. \quad (5.1.17)$$

Pierwsza część powyższego równania to podstawowy okres drgań wahadła – T_0 . Jeśli drugą część rozwinemy w szereg i weźmiemy dwa pierwsze człony, wówczas nasze równanie przyjmie postać:

$$T = T_0 \left(1 + 0,85 \frac{\rho_1}{\rho} \right) [s]. \quad (5.1.18)$$

Dla soczewki wykonanej ze stali o gęstości $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ i powietrza w warunkach normalnych ($t = 273,15 \text{ K}$ i $p = 101,325 \text{ kPa}$) o gęstości $\rho_1 = 1,292 \text{ kg/m}^3$ błąd dobowy wahadła ma wartość $B_d = 12,087 \text{ s}$. Jest on zwykle korygowany położeniem soczewki, ale problem pojawia się wraz z naturalnymi zmianami ciśnienia powietrza lub w przypadku zmiany ustawienia wahadła nad poziomem morza. Zależność gęstości powietrza od ciśnienia i temperatury przedstawia się następująco:

$$\rho_1 = \frac{p}{rT} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right], \quad (5.1.19)$$

gdzie: p – ciśnienie ,

$r = 287,1 \left[J / (\text{kg} \cdot \text{K}) \right]$ – indywidualna stała gazowa dla suchego powietrza ,

natomiast zależność ciśnienia od wysokości przedstawia wzór barometryczny:

$$p = p_0 \left(\frac{gh}{rT} \right), \quad (5.1.20)$$

w którym: g – przyspieszenie ziemskie ,
 r – indywidualna stała gazowa dla suchego powietrza ,
 p_0 – ciśnienie na poziomie odniesienia ,
 h – przewyższenie w stosunku do poziomu odniesienia .

Dla wahadła wykonanego ze stali, ustawionego na poziomie morza, zmiana ciśnienia o $1hPa$ ($0,1kPa$) wywoła błąd dobowy o wielkości $B_d = 0,011s$. Podobnie zmiana wysokości o $1m$ będzie skutkowałą błędem dobowym $B_d = 0,012s$.

Z powyższego wynika, że dla wahadła najlepszym środowiskiem pracy jest próżnia. Niestety, w warunkach ziemskich takie środowisko jest bardzo egzotyczne, w związku z tym poprzestaje się zwykle na utrzymywaniu wahadła w stałym ciśnieniu i ewentualnie jego regulację za pomocą zmian ciśnienia.

5.2 Zawieszka sprężysta

Podczas ruchu wahadła na zawieszce sprężystej, umieszczonego w dobrej próżni, daje się zaobserwować zmniejszanie się kolejnych amplitud. Jest to spowodowane przede wszystkim tarcie materiałowym. Zjawisko jest skomplikowane, zależne od wielu czynników, a przede wszystkim od rodzaju materiału. Objawia się tłumieniem, które z uwagi na niewielki wpływ na ruch wahadła opisuje się najczęściej jako liniowo zależne od prędkości tzw. tłumienie wiskotyczne. W takim przypadku, przy założeniu małych wychyleń, równanie ruchu ma postać:

$$J \frac{d^2\psi}{dt^2} + L \frac{d\psi}{dt} + M\psi = 0, \quad (5.2.1)$$

w którym L jest współczynnikiem oporu lepkiego. Wiedząc, że L jest niewielkie w porównaniu z J i M oraz korzystając z (2.14), rozwiązaniem równania (5.2.1) jest funkcja:

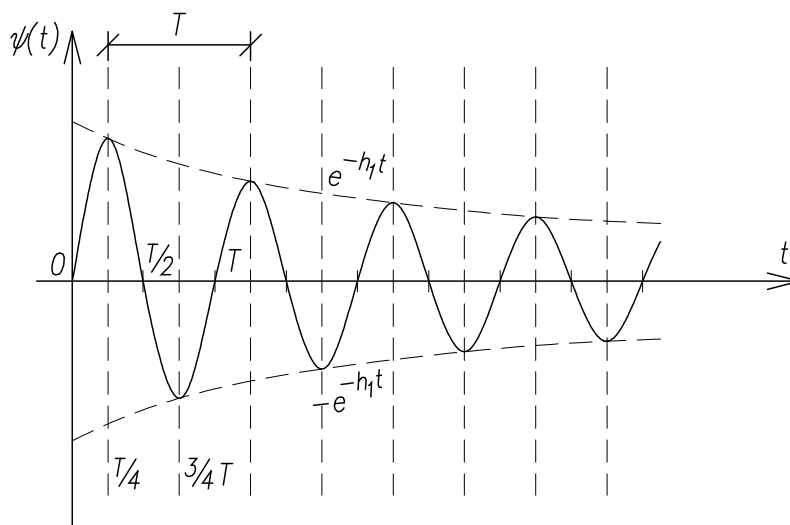
$$\psi(t) = Ae^{-h_1 t} \sin \omega_1 t, \quad (5.2.2)$$

gdzie:
$$h_1 = \frac{L}{2J}, \quad (5.2.3)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4JM - K^2}{4J^2}} = \sqrt{\omega^2 - h_1^2}. \quad (5.2.4)$$

Z powyższego wynika, że pod wpływem tłumienia wiskotycznego okres drgań rośnie w stosunku do podstawowego, przy czym jego wielkość jest stała podczas całego ruchu. Amplituda, z uwagi na zmniejszanie się energii układu, maleje. Dla oceny tłumienia wprowadza się logarytmiczny dekrement tłumienia, który jest logarytmem naturalnym ze stosunku wartości (bezwzględnych) kolejnych amplitud odległych od siebie o $\frac{T}{2}$:

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A(n+1)} = h_1 \frac{T}{2} = h_1 \frac{\pi}{\omega_1} \quad (5.2.5)$$



Rysunek 5.1. Wykres $\psi(t)$

5.3 Tarcie suche

W niektórych przypadkach zdarza się, że zamiast na zawieszce sprężystej, wahadło jest łożyskowane na innym typie łożyska, np. pryzmat, czy dla dużych wahadeł łożysko kulkowe. Wówczas pojawia się tłumienie niezależne od prędkości, zależne natomiast od obciążenia łożyska. Jeśli założymy, że wpływy spowodowane zmianami długości wahadła i zmianami siły ciężkości są pomijalne, tłumienie drgań jest niezależne od przemieszczenia. Założymy dodatkowo warunek małych wychyleń oraz, że tłumienie jest niewielkie, co prowadzi do następującego równania ruchu:

$$J \frac{d^2\psi}{dt^2} + M\psi - N = 0, \quad (5.3.1)$$

w którym: N – moment od sił tarcia w łożysku .

Podstawiając:

$$\alpha = \psi - \frac{N}{M}, \quad (5.3.2)$$

otrzymujemy podstawowe równanie ruchu wahadła:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + M \alpha = 0. \quad (5.3.3)$$

Uwzględniając (3.5) oraz, że $\psi(0) = A$ i $\frac{d\psi}{dt} = 0$, rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$\alpha(t) = C \cos \omega t, \quad (5.3.4)$$

a po powrocie z podstawienia:

$$\psi(t) = C \cos \omega t + \frac{N}{M}. \quad (5.3.5)$$

Po obliczeniu C z warunku:

$$C + \frac{N}{M} = A, \quad (5.3.6)$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$\psi(t) = \left(A - \frac{N}{M} \right) \cos \omega t + \frac{N}{M}. \quad (5.3.7)$$

Dla $t = \frac{\pi}{\omega}$ otrzymamy następną amplitudę, a pozostałe wstawiając za A poprzednią amplitudę i wyliczając następną jak wyżej. Wyliczmy zatem kolejne amplitudy:

Dla	$t = 0$	$A_0 = A$
	$t = \frac{\pi}{\omega}$	$A_1 = -\left(A - \frac{N}{M} \right) + \frac{N}{M} = -A + \frac{2N}{M}$
	$t = \frac{2\pi}{\omega}$	$A_2 = -\left(-A_1 - \frac{N}{M} \right) + \frac{N}{M} = -\left(A - \frac{2N}{M} \right) + \frac{N}{M} + \frac{N}{M} = A - \frac{4N}{M}$ itd.
	$t = \frac{n\pi}{\omega}$	$A_n = \text{sgn}(\cos \omega t) \left(A - \frac{2nN}{M} \right)$

6. Oddziaływania

Oddziaływania nie są obciążeniami, jednak wywołują zmiany w ruchu wahadła. Są to w szczególności:

- zmiany temperatury,
- zmiany długości wywołane siłą odśrodkową,
- wpływ położenia na powierzchni Ziemi,
- inne.

6.1 Zmiany temperatury

Jednym z parametrów wszystkich znanych materiałów konstrukcyjnych jest współczynnik rozszerzalności termicznej. Jest on definiowany jako:

$$\xi = \xi_0 (1 + \alpha_t d\tau) \text{ [m]}, \quad (6.1.1)$$

$$\alpha_t = \frac{1}{\xi_0} \frac{d\xi}{d\tau} \left[\frac{1}{K} \right], \quad (6.1.2)$$

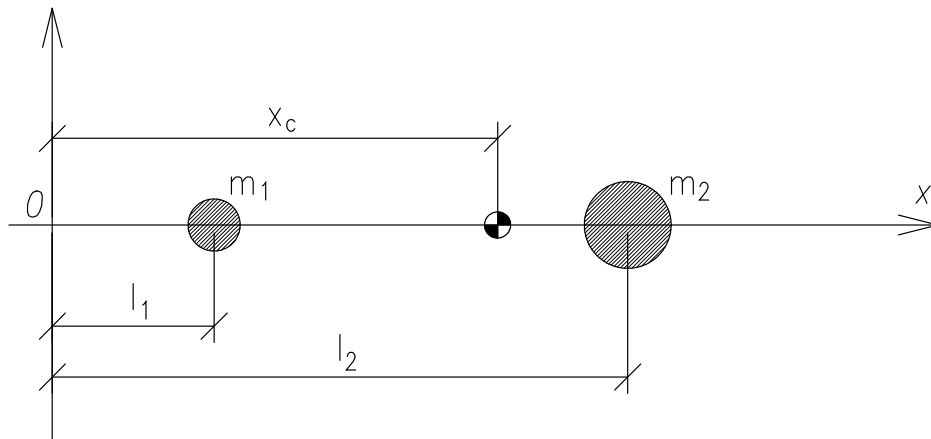
gdzie: ξ_0 – długość próbki w temperaturze τ_0 [K],

ξ – długość próbki w temperaturze $\tau_0 + d\tau$ [K].

W praktyce operuje się zwykle pojęciem średniego współczynnika rozszerzalności termicznej, dla którego:

$$\alpha_{\text{śr}} = \frac{1}{\xi_0} \frac{\xi - \xi_0}{\tau - \tau_0} \left[\frac{1}{K} \right]. \quad (6.1.3)$$

W celu oceny wpływu zmian temperatury na długość zredukowaną wahadła wyobraźmy sobie układ dwóch punktów materialnych rozmieszczonych dla uproszczenia na osi x jak na rysunku poniżej.



Rys. 6.1. Schemat rozmieszczenia punktów materialnych

Przed zmianą temperatury położenie środka masy układu będzie następujące:

$$x_c = \frac{l_1 m_1 + l_2 m_2}{m_1 + m_2} [m], \quad (6.1.4)$$

natomiast po zmianie temperatury:

$$x_c' = \frac{l_1 (1 + \alpha_{isr} \Delta t) m_1 + l_2 (1 + \alpha_{isr} \Delta t) m_2}{m_1 + m_2} [m], \quad (6.1.5)$$

w którym

$$\Delta t = \tau - \tau_0 [K], \quad (6.1.6)$$

a po przekształceniu

$$x_c' = x_c (1 + \alpha_{isr} \Delta t) [m]. \quad (6.1.7)$$

Z powyższego wynika, uogólniając, że środek ciężkości przemieszcza się proporcjonalnie do przemieszczeń wszystkich punktów materialnych układu. Podobnie możemy sprawdzić jak zachowuje się moment bezwładności i moment statyczny układu. Dla pojedynczej masy m_1 moment bezwładności względem środka ciężkości wynosi:

$$J_{01} = w_1^2 m_1 [kgm^2], \quad (6.1.8)$$

a po zmianie temperatury

$$J_{01}' = w_1'^2 (1 + \alpha_{isr} \Delta t) m_1 = w_1^2 (1 + (\alpha_{isr})^2 (\Delta t)^2 + 2\alpha_{isr} \Delta t) m_1 [kgm^2]. \quad (6.1.9)$$

Przyjmując, że wyrażenie

$$(\alpha_{isr})^2 (\Delta t)^2 \quad (6.1.10)$$

jest wielkością małą wyższego rzędu otrzymujemy ostatecznie:

$$J_{01}' = w_1^2 (1 + 2\alpha_{isr} \Delta t) m_1 [kgm^2], \quad (6.1.11)$$

z czego wynika, że moment bezwładności liczony względem środka ciężkości układu, przy różnicy temperatur, zachowuje się tak, jakby to masa ciała rosła z podwójnym współczynnikiem temperaturowym. Przechodząc teraz do punktu zawieszenia i korzystając z (5.6) oraz (5.9) otrzymujemy:

$$J' = J_0' + m (x_c')^2 = J (1 + 2\alpha_{isr} \Delta t) [kgm^2]. \quad (6.1.12)$$

W przypadku momentu statycznego, wobec (5.1), możemy napisać wprost, że po zmianie temperatury

$$S' = S(1 + \alpha_{tsr} \Delta t) \text{ [kgm]}. \quad (6.1.13)$$

Ostatecznie, korzystając z (6.1.12) i (6.1.13) możemy otrzymać długość zredukowaną wahadła po zmianie temperatury:

$$L_0' = \frac{J'}{S'} = L_0 \frac{(1 + 2\alpha_{tsr} \Delta t)}{(1 + \alpha_{tsr} \Delta t)} \text{ [m]}. \quad (6.1.14)$$

Dla uproszczenia dalszych obliczeń przyjmiemy, że

$$\kappa = \frac{(1 + 2\alpha_{tsr} \Delta t)}{(1 + \alpha_{tsr} \Delta t)}, \quad (6.1.15)$$

przy czym w większości przypadków, gdy zmiany temperatury wahadła są niewielkie, możemy przyjąć, że

$$\kappa = 1 + \alpha_{tsr} \Delta t. \quad (6.1.16)$$

Błąd temperaturowy dla przyrostu temperatury o Δt obliczamy analogicznie do (4.12):

$$B_t = n(T_{\Delta t} - T_0) = 2\pi \sqrt{\kappa \frac{l_0}{g}} - 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} = nT_0 \sqrt{\kappa} \text{ [s]}. \quad (6.1.17)$$

Uwzględniając (4.13) otrzymujemy dobowy błąd temperaturowy:

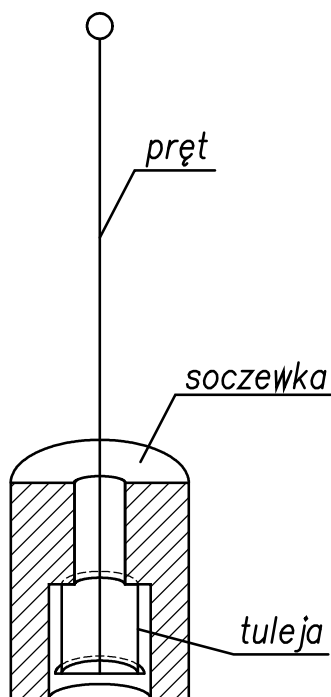
$$B_{td} = 86400 \sqrt{\kappa} \text{ [s]}. \quad (6.1.18)$$

W tabeli poniżej podano średnie współczynniki rozszerzalności liniowej w temperaturze $20^\circ C$ dla częściej spotykanych materiałów konstrukcyjnych oraz dobowe błędy wahadeł wykonanych z tych materiałów dla $\Delta t = 1K$. Należy zaznaczyć, że tak jak błąd kołowy, błąd temperaturowy nie zależy od długości wahadła, a dla ustalonego g tylko od czasu.

Material	α [$10^{-6}/K$]	B_{td} [s]
Brąz	18,0	366,564
Cynk	27,0	448,548
Inwar	0,4	54,644
Szkło kwarcowe	0,5	61,094
Miedź	16,0	345,600
Ołów	29,0	465,278
Stal	12,0	299,298

Tabela 6.1. Parametry α i B_{td} dla różnych materiałów konstrukcyjnych

Kompensacja błędu temperaturowego polega na takim doborze materiałów i konstrukcji wahadła, aby przy zmianie temperatury nie zmieniła się jego długość zredukowana. W praktyce jest to realizowane w ten sposób, że soczewka wahadła jest podparta w środku ciężkości, na tulei z materiału o innym współczynniku rozszerzalności liniowej niż pręt i soczewka.



Rys. 6.2. Kompensacja wahadła

Projektując kompensację wahadła, nasze rozumowanie będzie następujące. Jeśli po zmianie temperatury zmieniła się długość zredukowana wahadła o ΔL_0 , to w celu doprowadzenia jej do wielkości początkowej należy przemieścić odpowiednio jakiś element wahadła (najłatwiej soczewkę) tak, aby

$$\Delta L_0 = \Delta L_s, \quad (6.1.19)$$

gdzie: ΔL_s – zmiana długości zredukowanej wywołana przemieszczeniem soczewki.

Wiedząc, że:

$$L_0' = \kappa L_0 = (1 + \alpha_{sr} \Delta t) L_0 = L_0 + \Delta L_0 \text{ [m]}, \quad (6.1.20)$$

możemy zapisać:

$$\Delta L_0 = \frac{J}{S} \alpha_{sr} \Delta t = \Delta L_s \text{ [m]}. \quad (6.1.21)$$

Przyjmując odległość od osi obrotu do środka ciężkości soczewki przed zmianą temperatury jako l , po zmianie temperatury jako l' oraz przyrost tej odległości, niezbędny do zmiany długości zredukowanej wahadła o ΔL_0 , jako Δl otrzymujemy:

$$\frac{J}{S} \alpha_{sr} \Delta t = \frac{1}{S} \left[l' m_s^2 - (l' - \Delta l)^2 \right], \quad (6.1.22)$$

a stąd, po przyjęciu $\Delta l^2 = 0$, przemnożeniu obu stron równania przez S ,

$$J \alpha_{sr} \Delta t = 2l' \Delta l m_s. \quad (6.1.23)$$

Na podstawie (6.1.1)

$$J \alpha_{sr} \Delta t = 2l (1 + \alpha_{sr} \Delta t) \Delta l m_s, \quad (6.1.24)$$

a

$$\Delta l = \frac{J \alpha_{sr} \Delta t}{2l (1 + \alpha_{sr} \Delta t) m_s} [m]. \quad (6.1.25)$$

Jeśli tuleja o długości w zostanie wykonana z materiału o współczynniku rozszerzalności α_l oraz przyjąwszy, że popełniamy niewielki błąd przyjmując $(1 + \alpha_{sr} \Delta t) = 1$, wówczas:

$$w \alpha_l \Delta t = \frac{J}{2l m_s} \alpha_{sr} \Delta t. \quad (6.1.26)$$

Ostatecznie:

$$w = \frac{J}{2l m_s} \frac{\alpha_{sr}}{\alpha_l} [m]. \quad (6.1.27)$$

Wówczas, gdy możemy zaniedbać moment bezwładności pręta, wzór powyższy upraszcza się do postaci:

$$w = \frac{1}{2} \frac{\alpha_{sr}}{\alpha_l} [m]. \quad (6.1.28)$$

Powyższe rozważania zostały przeprowadzone dla przypadku, gdy tuleja podparta jest w środku ciężkości soczewki w temperaturze podstawowej. W innych rozwiązaniach należy uwzględnić wpływ rozszerzalności pręta na α_l .

6.2 Zmiany długości wywołane siłą odśrodkową

Na wahadło, oprócz przyspieszenia siły ciężkości działa siła odśrodkowa wywołana jego ruchem. Jeśli przyjmiemy, że ruch rozpoczyna się w górnym położeniu to równanie ruchu przyjmuje postać:

$$\psi(t) = A \cos \omega t, \quad (6.2.1)$$

a równanie przyspieszenia odśrodkowego, punktu odległego o x od osi obrotu:

$$a(x) = A^2 \omega^2 x \sin^2 \omega t. \quad (6.2.2)$$

Wraz z przyspieszeniem pojawia się siła odśrodkowa, która dla ustalonego przekroju wahadła, odległego o ζ od osi obrotu, jest sumą wszystkich sił odśrodkowych działających na punkty leżące poniżej rozpatrywanego przekroju:

$$N_d(\zeta) = \sum_1^n a_i m_i. \quad (6.2.3)$$

Przyjmując, że odległości punktów z jednego przekroju, nieleżących na osi podłużnej wahadła niewiele się różnią od tych leżących na tej osi oraz, że wahadło jest ośrodkiem ciągłym otrzymujemy:

$$N_d(\zeta) = A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \int_{\zeta}^l F(x) \rho(x) x dx, \quad (6.2.4)$$

gdzie: $F(x)$ – pole przekroju dla bieżącej współrzędnej x ,

$\rho(x)$ – gęstość w przekroju dla bieżącej współrzędnej x .

Dla wahadła, które możemy przybliżyć wahadłem matematycznym, wzór (6.2.4) upraszcza się do postaci:

$$N_d(\zeta) = mlA^2 \omega^2 \sin^2 \omega t, \quad (6.2.5)$$

co dla $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}$ daje:

$$N_{\max} = mgA^2 [N]. \quad (6.2.6)$$

Aby oszacować wpływ tej siły na długość wahadła, wyobraźmy sobie wahadło o długości $l = 1,0m$ i amplitudzie wahań $A = 0,01rad$, którego soczewka o masie $m = 1,0kg$ zawieszona jest na drucie stalowym o powierzchni przekroju $F = 0,1mm^2$ i module sprężystości

podłużnej $E = 205\text{GPa}$. Dla uproszczenia przyjmijmy jeszcze, że N_{\max} działa przez cały okres (oszacowanie z góry). W takim przypadku wydłużenie drutu wyniesie:

$$\Delta l = \frac{lN}{EF} = \frac{1,0 \times 1,0 \times 9,81 \times 0,01^2}{205 \times 10^9 \times 0,1 \times 10^{-6}} = 4,8 \times 10^{-8} \text{ m}, \quad (6.2.7)$$

a średni błąd dobowy wahadła nie przekroczy wartości:

$$B_d = 86400 \times \frac{2\pi}{9,81} \times \left(\sqrt{1,0 + 4,8 \times 10^{-8}} - 1,0 \right) = 1,3 \times 10^{-3} \text{ s}. \quad (6.2.8)$$

W praktyce, dla precyzyjnego wahadła, którego pręt ma przekrój poprzeczny rzędu 20mm^2 , błąd dobowy wywołany siłą odśrodkową jest wielokrotnie mniejszy, a co za tym idzie może być pominięty, gdyż nie osiąga dokładności wahadła.

7. Geometria

Wahadła mogą mieć różne kształty, jednak my zajmiemy się wahadłami, które złożone są wyłącznie z elementów walcowych, kołowo symetrycznych, a więc takich których wykonanie jest proste w przeciętnych warunkach warsztatowych.

7.1 Moment statyczny

Moment statyczny jest sumą iloczynów elementarnych mas m_i i ich odległości l_i od osi obrotu:

$$S = \sum_1^n l_i m_i \quad [\text{kgm}] \quad (7.1.1)$$

lub, dla ośrodka ciągłego:

$$S = \int l \rho(x, y, z) dV \quad [\text{kgm}]. \quad (7.1.2)$$

W przypadku, gdy możemy zastosować założenie o jednorodności materiału, wzór (7.1.2) upraszcza się do postaci:

$$S = \rho \int l dV \quad [\text{kgm}]. \quad (7.1.3)$$

Dalsze uproszczenie obliczeń możemy uzyskać wykorzystując (6.4), z którego wynika, że moment statyczny dowolnej bryły jest równy iloczynowi jej masy i odległości od środka ciężkości do osi obrotu.

7.2 Moment bezwładności

Moment bezwładności jest sumą iloczynów elementarnych mas m_i i ich kwadratów odległości l_i od osi obrotu:

$$J = \sum_1^n l_i^2 m_i \quad [\text{kgm}^2] \quad (7.2.1)$$

lub, dla ośrodka ciągłego:

$$J = \int l^2 \rho(x, y, z) dV \quad [\text{kgm}^2]. \quad (7.2.2)$$

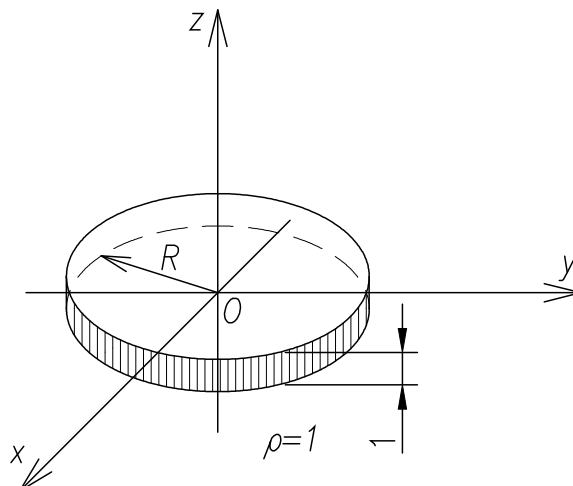
W przypadku, gdy możemy zastosować założenie o jednorodności materiału, wzór (7.2.2) upraszcza się do postaci:

$$J = \rho \int l^2 dV \quad [\text{kgm}^2]. \quad (7.2.3)$$

Zwykle, moment bezwładności oblicza się dla osi przechodzącej przez środek ciężkości bryły, a przy przejściu do innej, równoległej osi obrotu, stosuje się twierdzenie Steinera, które mówi, że w takim przypadku moment bezwładności jest równy momentowi podstawowemu powiększonemu o iloczyn masy bryły i kwadratu odległości l_0 jej środka ciężkości od nowej osi obrotu:

$$J = J_0 + ml_0^2 \quad [\text{kgm}^2]. \quad (7.2.4)$$

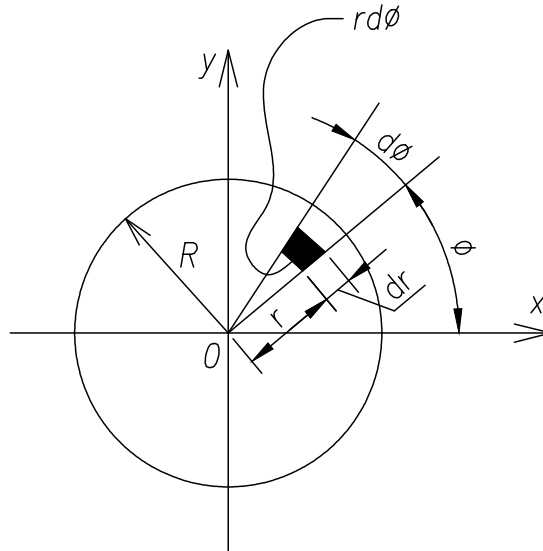
Wyobraźmy sobie walec kołowy o promieniu R , o grubości i gęstości jednostkowej, leżący na płaszczyźnie X, Y jak na rysunku niżej.



Rys. 7.1. Schemat walca kołowego

Moment bezwładności względem osi Z będzie następujący:

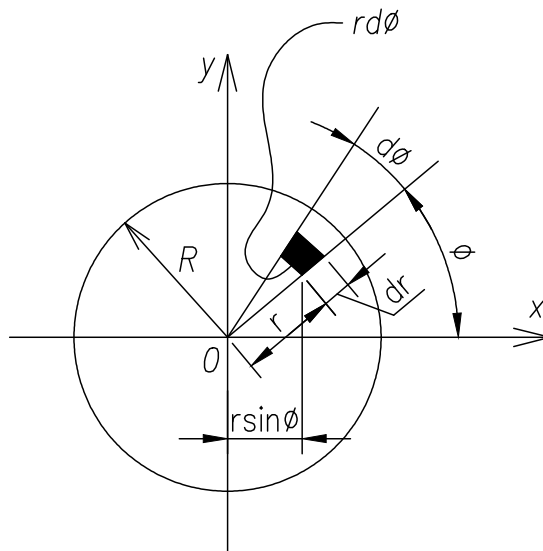
$$J_z = \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} \pi R^4 \text{ [kgm}^2\text{]}, \quad (7.2.5)$$



Rys. 7.2. Schemat całkowania

natomiast względem osi X i Y:

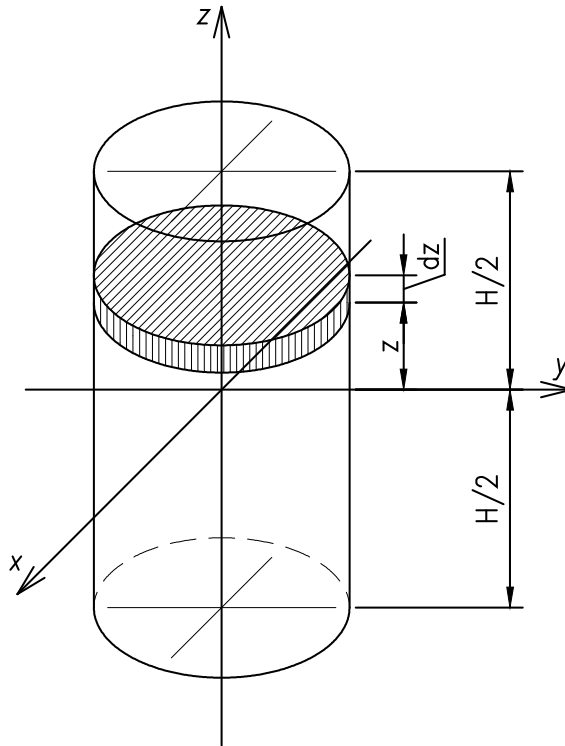
$$J_x = J_y = 4 \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \pi R^4 \text{ [kgm}^2\text{]}. \quad (7.2.6)$$



Rys. 7.3. Schemat całkowania

W celu obliczenia momentu bezwładności walca kołowego o wysokości H , promieniu R i gęstości ρ , względem jednej z osi przechodzących przez środek ciężkości, prostopadłej do jego osi podłużnej, skorzystamy z twierdzenia Steinera:

$$J_{x_0} = 2\pi\rho R^2 \int_0^{H/2} \left(z^2 + \frac{1}{4}R^2 \right) dz = m \left(\frac{1}{12}H^2 + \frac{1}{4}R^2 \right) \text{ [kgm}^2\text{]}. \quad (7.2.7)$$



Rys. 7.4. Schemat całkowania

© Copyright by Janowscy s.c.
Projektowanie w budownictwie